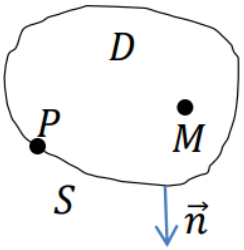
Ранее мы решали исключительно пространственные (плоские) задачи – времени у нас нигде не было. И вот оно появляется на сцене. Теперь мы будем решать пространственно-временные задачи.

Пространственно-временные – это мой термин, а кафматовский – начально-краевые! До этого у нас были, соответственно, краевые. Но мой понятней, как по мне.

При решении мы будем использовать СФ области, так что раньше мы пространственно-временные задачи решать не могли, а вот после того, как в сентябре-октябре поупарывались нахождением СФ в различных областях – уже можем.

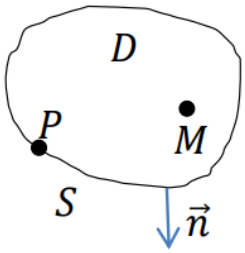
Будем различать задачу теплопроводности:



$$\begin{cases} u_t = a^2 \,\Delta\, u + f(M,t),\ M \in D,\ t > 0, & \text{(ДУ)} \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = 0,\ P \in S,\ t \geq 0, & \text{(ГУ)} \\ u|_{t=0} = \varphi(M),\ M \in D. & \text{(НУ)} \end{cases}$$

Здесь $a = \text{const} > 0$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $\alpha \cdot \beta \geq 0$.
Требуется найти $u(M,t)$ при $M \in \overline{D}$, $t \geq 0$.

И колебательную задачу:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \,\Delta\, u + f(M,t),\ M \in D,\ t > 0, & \text{(ДУ)} \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = 0,\ P \in S,\ t \geq 0, & \text{(ГУ)} \\ u|_{t=0} = \varphi(M),\ M \in D, & \text{(НУ)} \\ u_t|_{t=0} = \psi(M),\ M \in D. & \text{(НУ)} \end{cases}$$

Как мы видим, все они похожи:
Основа – дифференциальное уравнение (ДУ). Теплопроводное уравнение содержит первую производную по времени, колебательное уравнение – вторую. А в остальном они совершенно схожи.
Далее у нас следует граничные условия, ГУ. Обратите внимание, что они (в отличие от НУ) должны быть однородны (т.е. в правой части стоит 0). Иначе тот алгоритм, который будет ниже, работать не будет.
Ну и чтобы мы могли следить за эволюцией системы, нам нужно знать всё-всё в начальный момент времени (начальные условия, НУ). В случае теплопроводности у нас ДУ первого порядка относительно t, так что достаточно знать u везде при t=0, а в случае волновой задачи нужно знать

ещё и производную u по времени везде, т.к. там в ДУ уже вторая производная по времени стоит.

Алгоритм решения:

Первый шаг: найти СФ области с теми же α и β.
Если область «хорошая» (прямоугольник, кирпич, круг, сектор круга, кольцо, сектор кольца, шар, шаровой сектор, шар с вырезанной серединой (т.е. «конфета без ореха»)), то СФ вы можете найти явно.
Если область противная – то не можете.
Кафмат, естественно, даёт те области, где СФ вы можете найти явно.

Замечание! СФ нужно искать именно с теми α и β, которые были у вас в начальной задаче.
Вот сюда

$$\begin{cases} \Delta\, v(M) + \lambda v(M) = 0, \qquad M \in D, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\Big|_S = 0. \end{cases}$$

Подставляем именно те альфа и бета, которые были у вас в исходной пространственно-временной задаче.
В частности, если у вас там был Дирихле – и СФ ищете с ГУ Дирихле. Был Нейман – и СФ ищете с ГУ Неймана.

Нашли СФ?

Шаг 2. Разложите все неоднородности по СФ.
Неоднородности – это φ(M), Ψ(M) {она есть только в в волновой задаче, в теплопроводной её нет} и f(M, t).
Так, для задачи теплопроводности раскладываем φ(M) и f(M, t).

$$\varphi(M) = \sum_n \varphi_n v_n(M), \qquad \varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D \varphi(M) v_n(M)\, dV,$$

$$f(M,t) = \sum_n f_n(t) v_n(M), \qquad f_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_D f(M,t) v_n(M)\, dV.$$

f(M, t) – функция двух переменных => будем считать t параметром => коэффициенты $f_n(t)$ будут зависеть от t.

Для волновой задачи будет аналогично, только там придётся ещё Ψ(M) разложить.

Видите, кстати, множитель с квадратом нормы? Помните, как в первой половине семестра ваш семинарист требовал находить квадрат нормы СФ, а вы ныли «ну зачем это нужно?» А вот здесь это пригодилось.

Шаг 3.

Решение начально–краевой задачи для уравнения теплопроводности также будем искать в виде ряда Фурье по $\{v_n(M)\}$:

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t) v_n(M)$$

с неизвестными коэффициентами $T_n(t)$.

Вообще эти коэффициенты было бы корректней назвать $u_n(t)$ по аналогии с $f_n(t)$. Но Колыбасова и Буткарёв используют обозначение $T_n(t)$.

Помните, как я в начале подчеркнул, что ГУ должно быть обязательно однородным, а коэфы α и β для нахождения СФ нужно брать точно такими же, как и в исходной задаче?
Благодаря этому ГУ автоматически выполнится как и для каждой СФ, так и для произвольной их линейной комбинации

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t) v_n(M)$$

Так что нам нужно решить ДУ лишь с учётом НУ – а ГУ выполнится автоматически.
Подставляем u в таком виде в дифур. В случае, если это дифур теплопроводности, будет

$$\begin{cases} \sum_n T_n'(t) v_n(M) = a^2 \sum_n T_n(t) \underbrace{\Delta v_n(M)}_{-\lambda_n v_n(M)} + \sum_n f_n(t) v_n(M), \\ \sum_n T_n(0) v_n(M) = \sum_n \varphi_n v_n(M). \end{cases}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при $v_n(M)$, получим:

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Это задача Коши для ОДУ первого порядка. Её решение можно записать в виде (дома проверить):

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int_0^t \underbrace{e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)}}_{\text{функция Коши}} f_n(\tau)\, d\tau.$$

Замечание 1: данное представление решения задачи Коши (2) справедливо и в случае $\lambda_n = 0$.

В случае дифура колебаний будет… а про них я потом скажу, когда будем решать задачу на них.

Замечание 2 (Колыбасова о нём тоже пишет): иногда оказывается, что решать задачу Коши проще не через функцию Коши, а как-нибудь иначе. Это мы видим в следующем примере.

Примеры.

Пример на теплопроводность я возьму у Колыбасовой.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t \cos \dfrac{3\pi x}{2l}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \cos \dfrac{\pi x}{2l}. \end{cases}$$

Попытаемся представить физическую иллюстрацию. Слева и справа на концах отрезка стоят два источника постоянной температуры 0 (пусть вас не пугает «это же абсолютный нуль» - уравнения теплопроводности будут иметь такой же вид, если ноль шкалы температуры мы возьмём где угодно, например, в шкале Цельсия), а начальное распределение температуры имеет форму косинуса. Что будет дальше с системой?

Ищем СФ.

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0, \qquad 0 < x < l, \\ v'(0) = 0, \qquad v(l) = 0. \end{cases}$$

Помним, что мы не должны менять ГУ. Слева, при x=0 был Нейман – и в задаче на СФ будет Нейман. Справа, при x=l был Дирихле –и он же останется.

$$\lambda_n = \left[\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}\right]^2, \qquad v_n(x) = \cos\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Разложим функции $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2l}$ и $f(x,t) = t\cos\frac{3\pi x}{2l}$ в ряд Фурье по $\{v_n(x)\}$:

$$\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2l} = v_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n v_n(x) \;\; \Rightarrow \;\; \varphi_n = \delta_{n1};$$

$$f(x,t) = t\cos\frac{3\pi x}{2l} = t v_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(x) \;\; \Rightarrow \;\; f_n(t) = t\delta_{n2}.$$

Нам повезло: разложение очень простое, по сути и φ(), и f(,t) – СФ, только при разных n: одна при единице, другая при двойке.

Теперь мы можем или подставить u, которое мы тоже разложили по СФ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(x)$$

В исходную задачу, или воспользоваться результатом из теории выше, где мы подставляли в общем случае:

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n. \end{cases}$$

Результат для нашего примера будет

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = t\delta_{n2}, \\ T_n(0) = \delta_{n1}. \end{cases}$$

Можем воспользоваться функцией Коши, но здесь это неудобно (и неудобно будет во всех задачах, где у нас «засветилось» конечное число n). Напомню, что «засвеченными» индексами n будут те, которые не занулились в разложении хоть какой-нибудь из неоднородностей из исходной задачи (f(,t), φ()) – именно при таких индексах не занулятся индексы ответа $u_n(t)=T_n(t)$. Если индексы не засветились, то соответствующие $u_n(t)=T_n(t)$ будут тождественным нулём).

В данной задаче засветились всего два индекса: 1 и 2. Другие не засветились ни в одной из однородностей, значит, и $u_n(t)=T_n(t)$ будет тождественным нулём при n>2.
(в принципе засвеченных индексов можно убедиться строго:
При $n \neq 1, 2$ эта задача Коши однородна:
$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = 0. \end{cases}$$
В силу единственности решения задачи Коши для ОДУ она имеет только тривиальное решение: $T_n(t) = 0$.
)
Воспользуемся тем, что всего два засвеченных индекса, и рассмотрим два случая.

Случай n=1:
$$\begin{cases} T_1'(t) + a^2\lambda_1 T_1(t) = 0, \\ T_1(0) = 1. \end{cases}$$
ОР ДУ имеет вид $T_1(t) = Ae^{-a^2\lambda_1 t}$, причём из НУ $A = 1$. Таким образом, $T_1(t) = e^{-a^2\lambda_1 t}$.

Случай n=2:
$$\begin{cases} T_2'(t) + a^2\lambda_2 T_2(t) = t, \\ T_1(0) = 0. \end{cases}$$
А тут дифур уже неоднородный, но вполне решаемый. Решением будет
$$T_2(t) = \frac{e^{-a^2\lambda_2 t}}{a^4\lambda_2^2} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}.$$
Теперь подставим найденные $T_n(t)$ в ряд для решения начально-краевой задачи:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)v_n(x) = T_1(t)v_1(x) + T_2(t)v_2(x) =$$
$$= e^{-a^2\lambda_1 t}\cos\frac{\pi x}{2l} + \left(\frac{e^{-a^2\lambda_2 t}}{a^4\lambda_2^2} + \frac{t}{a^2\lambda_2} - \frac{1}{a^4\lambda_2^2}\right)\cos\frac{3\pi x}{2l},$$
где $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$, $\lambda_2 = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^2$.

А вот примеры на задачу колебаний я возьму у Буткарёва, потому что они у меня записаны.
Сперва давайте рассмотрим общий случай. Итак, мы подставляем u, заботливо разложенное по всем СФ, в дифур.

Задача решается аналогично, но для $T_n(t)$ получается задача Коши:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases}$$

где φ_n, ψ_n, $f_n(t)$, $T_n(t)$ — коэффициенты разложения функций $\varphi(M)$, $\psi(M)$, $f(M,t)$, $u(M,t)$ в ряд Фурье по СФ соответствующей задачи Ш.–Л.

Решение этой задачи Коши имеет вид:

$$T_n(t) = \begin{cases} \varphi_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + \dfrac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}t + \displaystyle\int_0^t \frac{\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)}{a\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau)\, d\tau, & \lambda_n > 0, \\ \varphi_n + \psi_n t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau, & \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Опять получаем задачу Коши, но на этот раз уже для дифура второго порядка. Опять есть решение в общем виде, но оно страшное, на практике бывает проще решить задачу Коши иначе.

Пример 1.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + xe^{-t}, \quad x \in (0..1),\ t \in (0;+\infty) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u|_{x=0,1} = 0 \end{cases}$$

Волновая задача, одномерный случай.

Ну нам, конечно, фартануло. И φ(M), и Ψ(M) – 0, их даже не надо будет по СФ раскладывать. Придётся разложить только $f(t, M)=xe^{-t}$

А какие у нас там СФ отрезка? Косинус и синус. Надо только сообразить, что. Какое ГУ? Дирихле. Значит, синусы. А т.к. у нас отрезок от 0 до 1, а не от 0 до π. Значит, sin πnx.

Теперь нам надо раскладывать xe^{-t} по таким вот синусам. Точнее, раскладывать x, а e^{-t} «постоит и посмотрит», то есть просто будет множителем.

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{\int_0^1 \sin^2 \pi n x} \int_0^1 x \sin \pi n x\, dx = e^{-t} \cdot \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Хотя у нас всего лишь одна неоднородность не является тождественным нулём, засветились все индексы. Значит, надо писать формулу в общем виде (которая страшная).

Коэфы в разложении u(M,t) будут

$$U_n(t) = T_n(t) = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}\int_0^t e^{-\tau}\frac{1}{a\pi n}\sin a\pi n(t-\tau)\,d\tau$$

Интеграл считается, но долго. Буткарёв потратил на это некоторое время и получил

$$\frac{\sin \pi a n t - \pi a n \cos \pi a n t + \pi a n e^{-t}}{1+\pi^2 a^2 n^2}$$

Ответ будет

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}\cdot\frac{\sin \pi a n t - \pi a n \cos \pi a n t + \pi a n e^{-t}}{1+\pi^2 a^2 n^2}$$

Немного о физическом смысле (как правило, в пространственно-временных задачах он более очевиден, чем в пространственных).
У нас одномерный случай, т.е. струна, на обоих концах (x=0 и x=1) ГУ Дирихле=>струна жёстко закреплена.
Если в уравнении колебаний нулевая неоднородность f(M,t), это соответствует свободным колебаниям, т.е. в отсутствие внешней силы. А если f(M,t) не равна нулю, то это означает, что на каждую точку плёнки действует сила, которая может зависеть от точки M, к которой она прикладывается, и от момента времени t. Если это сила непериодическая, то и u вовсе не обязано быть периодическим и представляет собой суперпозицию собственных колебаний и движения под действием внешней силы, как в данной задаче: собственные колебания на циклической частоте ω=πan (точнее, на собственных частотах, их бесконечного много) и вызванного внешней силой (последнее слагаемое в ответе).

А вот вам ещё одна задача, уже двумерная, в кольце:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u \\ u|_{t=0} = A J_3(\sqrt{\lambda_{13}}\, r) \sin 3\varphi \\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{r=r_0} = u|_{\varphi=0,\frac{\pi}{3}} = 0 \end{cases}$$

На этот раз придётся разложить по СФ сектора круга φ(M). А может, и не надо – она сама по себе СФ? Проверим. СФ сектора круга с такими ГУ будет

$$V_{nk}(r,\theta) = J_{3n}(\sqrt{\lambda_{k,3n}}\, r) \sin 3n\varphi$$

Ну да, φ(M) – это СФ при n=k=1.

Считаем все коэффициенты разложения:
f(M,t)=тождественный нуль => все $f_n(t)$ тогда тоже нули
Ψ(M) =тождественный нуль => все $\Psi_n(t)$ тогда тоже нули
v(M)=СФ при n=k=1 => все φ нули, кроме как одной φ_{nk} . Считаем её. Это

$$\frac{1}{\iint J_3^2(\sqrt{\lambda_{3,1}}\, r) \sin^2 3\varphi\, r\, dr\, d\varphi} \iint A\, J_3(\sqrt{\lambda_{13}}\, r) \sin 3\varphi\, J_3(\sqrt{\lambda_{13}}\, r) \sin 3\varphi\, r\, dr\, d\varphi$$

Т.е. A.

Подставляем всё это добро
Теперь записываем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases}$$

Дифур однородный (благодаря тому, что все $f_n(t)$ нули) так что его решением будут $\sin(\sqrt{\lambda_{13}}at)$ и $\cos(\sqrt{\lambda_{13}}at)$. Надо только подобрать их линейную комбинацию, чтобы под НУ подходила. Все Ψ_n =0 => в нуле производная 0 => синус идёт нафиг, остаётся только косинус – будет const* $\cos(\sqrt{\lambda_{13}}at)$.
Теперь смотрим условие с φ_n и находим const, подставляя t=0:
$\cos(\sqrt{\lambda_{13}}at)$ тогда будет 0, и const=φ_n
Пишем ответ. Это $T_1(t)*v_{11}(r,\varphi)$, т.е.

$$u = A\cos a\sqrt{\lambda_{13}}t \cdot J_3(\sqrt{\lambda_{13}}r)\sin 3\varphi$$

Обсудим физический смысл. В данной задаче ГУ Дирихле и круг. Это означает, что у нас есть твёрдая рамка, на которую натянута резиновая плёнка, которая совершает колебания на одной частоте (благодаря хорошим НУ, где у нас только одна СФ), а точки на плёнке колеблются с разной амплитудой – в частности, где функция Бесселя обнуляется, они вообще покоится.
Так как в данной задаче f(M,t) равна нулю, то это случай свободных колебаний, и действительно – в ответе только синусы и косинусы.

Ещё пример:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u \\ u|_{z=z_0} = u_z|_{z=0,l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = Ar^2 \sin 2\varphi \end{cases}$$

Проверяем ГУ – они однородные. Ищем для них СФ:

$$V^{c,s}_{nkm} = J_n\left(\sqrt{\mu_{nk}}\, r\right) \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} \cos \frac{\pi m z}{l}$$

А СЗ у них такие

$$\lambda_{nkm} = \mu^2_{nk} + \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2$$

Начинаем по ним раскладывать нашу единственную неоднородность – Ψ():

$$\Psi_n = \frac{1}{\|V_{nkm}\|^2} \iiint\limits_{\substack{z\in[0..l] \\ \varphi\in[0..2\pi] \\ r\in[0..r_0]}} Ar^2 \underset{\Psi()}{\sin 2\varphi} \cdot \underbrace{J_n\left(\sqrt{\mu_{nk}}\, r\right) \begin{matrix} \cos \frac{\pi m z}{l} \\ \sin \frac{\pi m z}{l} \end{matrix}}_{V_{nkm}} dr\, d\varphi\, dz$$

Не забываем про якобиан r! Напомню, что интегрирование идёт по объёму, где определены наши переменные, а dV=r*dr*dφ*dθ.

$$\Psi_n = \frac{1}{\|V_{nkm}\|^2} \iiint\limits_{\substack{z\in[0..l] \\ \varphi\in[0..2\pi] \\ r\in[0..r_0]}} Ar^2 \underset{\Psi()}{\sin 2\varphi} \cdot \underbrace{J_n\left(\sqrt{\mu_{nk}}\, r\right) \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix}}_{V_{nkm}} \cos \frac{\pi m z}{l}\, r\, dr\, d\varphi\, dz$$

Начнём с интеграла по z. Не ноль он будет, только когда m=0 и мы должны взять косинус. Тогда будет косинус 0, т.е. константа. Это мы, кстати, могли и

заранее сказать, заметим, что нигде в ГУ нет зависимости от z, но я уж решил выписать явно через тройной интеграл, чтобы вы знали, как находить коэфы Ψ_n во всех ситуациях.
Интеграл по φ будет не ноль, только если n=2 и мы берём именно именно синусовую СФ.
Остался интеграл по r – от функции Бесселя, домноженной на r^3! Буткарёв его считает, и, оказывается, он равен

$$\int_0^{r_0} A r^3 J_2\left(\sqrt{\mu_{2k}}\, r\right) dr = \frac{1}{\mu^2} r_0^2 \mu^{3/2} J_3\left(\sqrt{\mu_k^2}\, r_0\right)$$

В этой задаче f(M, t) было также нулём.

Итоговой вид коэфов Ψ_{nkm}:

$$\Psi_{nkm}^{(c,s)} = \frac{1}{\|v_{nkm}\|^2} \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} A r^2 \sin 2\varphi\, v_{nkm}^{(c,s)}\, r\, dz\, d\varphi\, dr =$$

$$= \frac{2\delta_{n2}\delta_{m0}}{r_0^2 J_2'^2\left(\sqrt{\mu_k^2}\, r_0\right)} \int_0^{r_0} A r^3 J_2\left(\sqrt{\mu_k^2}\, r\right) dr = \frac{2A\delta_{n2}\delta_{m0}}{r_0^2 J_2'^2\left(\sqrt{\mu_k^2}\, r_0\right)} \cdot \frac{1}{\mu^2} r_0^3 \mu^{3/2} \cdot J_3\left(\sqrt{\mu_k^2}\, r_0\right)$$

В общем случае u писалась бы через тройную сумму, но т.к. два коэффициента у нас выродились, то сумма будет одиночной – по k:

$$\text{Ответ: } u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\mu_k^2}} \frac{2 a r_0 J_3\left(\sqrt{\mu_k^2}\, r_0\right)}{\sqrt{\mu_k^2} \cdot J_2'^2\left(\sqrt{\mu_k^2}\, r_0\right)} \sin a\sqrt{\mu_k^2}\, t \cdot J_2\left(\sqrt{\mu}\, r\right) \cdot \sin 2\varphi.$$

Замечание. Буткарёв пишет у μ один коэф сверху, другой снизу, я оба снизу. В любом случае это не степень, а индекс.